

## Estimasi Populasi Plankton dengan Ensemble Kalman Filter

### *Estimation of Plankton Population Using Ensemble Kalman Filter*

Kosala Dwidja Purnomo<sup>1)</sup> & Erna Apriliani<sup>2)</sup>

1) Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember

2) Program Magister Jurusan Matematika FMIPA ITS

#### ABSTRACT

The objective of this paper is to simulate how the Ensemble Kalman Filter (EnKF) works to estimate plankton in the one-dimensional three components ecosystem model. The analysis has been done separately between nutrition component and plankton component. The simulation demonstrated that the EnKF with 100 ensembles has as good estimation as with 1000 ensembles. It will also be illustrated that the increasing of ensemble size in EnKF can decrease the norm of error covariance of plankton component.

Keywords: Ensemble size, norm of error covariance, Ensemble Kalman Filter.

#### PENDAHULUAN

Asimilasi data adalah salah satu teknik estimasi yang banyak digunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah sistem dinamik. Diantara kelebihan teknik ini adalah adanya data pengukuran yang setiap saat dapat digunakan untuk memperbaiki estimasi model. Selain itu, di dalam teknik estimasi ini juga dipertimbangkan faktor stokastik yang berbentuk noise pada model dan pengukuran. Kalman (1960) telah mempublikasikan penelitiannya tentang solusi rekursif dari masalah filtering linier dengan data diskrit. Solusi rekursif yang menggunakan teknik asimilasi data ini dikenal dengan istilah *Kalman Filter*. Algoritma Kalman Filter memberikan inspirasi bagi peneliti lain untuk membahas pengembangan beserta aplikasinya, terutama dalam masalah navigasi (Welch & Bishop 2004). Algoritma Kalman Filter juga telah digunakan untuk mengestimasi ketinggian dan kecepatan air laut (Verlaan 1998) serta perairan dangkal (Apriliani 2003). Maybeck (1979) bahkan telah menggunakan algoritma Kalman Filter dalam navigasi proyek Apollo (Verlaan 1998).

Algoritma yang dikembangkan dalam Kalman Filter hanya dapat diimplementasikan pada model dinamik linier. Oleh karena itu, kemudian dikembangkan algoritma yang memodifikasi Kalman Filter agar dapat diimplementasikan pada model dinamik nonlinier. Algoritma yang telah dikembangkan diantaranya adalah *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF).

Kedua algoritma ini memiliki karakteristik yang berbeda. Algoritma EKF dijalankan dengan melakukan linierisasi pada model dinamik nonlinier sebelum diimplementasikan pada algoritma Kalman Filter. Sedangkan algoritma EnKF dijalankan dengan membangkitkan sejumlah ensemble tertentu untuk menghitung nilai mean dan kovariansi error variabel statenya.

Teknik asimilasi data juga telah banyak digunakan untuk melakukan estimasi pada bidang kelautan secara fisik dan meteorologi, sehingga para peneliti mulai mencoba mengimplementasikan pada bidang lain, yaitu biologi. Pengembangan penerapan teknik asimilasi data yang mengarah pada bidang zoologi kelautan akan sangat bermanfaat bagi negara maritim seperti Indonesia yang berpotensi memproduksi ikan secara berlimpah. Oleh karena itu, studi tentang populasi plankton sebagai makanan ikan di laut masih menjadi hal yang cukup penting. Dalam tulisan ini akan dilakukan kajian tentang aplikasi metode EnKF pada model populasi plankton. Metode ini dipilih karena dianggap tepat untuk digunakan pada model yang berbentuk *strongly nonlinear* (Eknes & Evensen 2002).

Metode Ensemble Kalman Filter (EnKF) pertama kali dikembangkan oleh Evensen (1992-1993) pada saat mencoba mengimplementasikan metode EKF untuk asimilasi data pada suatu model. Linierisasi dalam metode EKF ternyata menyebabkan kovariansi errornya membesar menuju takhingga. Selanjutnya Evensen (1994) telah memperkenalkan ide penggunaan sejumlah

ensemble untuk mengestimasi kovariansi error pada tahap forecasting pada masalah yang sama. Bersama Burgers dan van Leeuwen, pada tahun 1998 Evensen merumuskan skema analisis dalam metode yang EnKF (Burgers *et al.* 1998). Dalam hal ini telah ditunjukkan adanya korespondensi yang unik antara statistika error dalam EnKF dan dalam Kalman Filter standar. Selanjutnya Evensen (2003) merumuskan kembali secara lebih detail teori dan implementasi dari metode EnKF.

Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana mengimplementasikan metode EnKF pada model populasi plankton yang berbentuk nonlinier. Model populasi plankton yang akan digunakan mengacu pada model yang diusulkan oleh Eknes & Evensen (2002) dengan beberapa modifikasi parameter. Parameter dipilih sedemikian rupa sehingga memberikan hasil estimasi yang konvergen. Model hasil modifikasi yang akan dibahas adalah

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(\frac{0,07555N}{0,5 + N} - 0,07\right)F + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y(y, M(t))\frac{\partial N}{\partial y}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\left(\frac{0,07555N}{0,5 + N} - 0,07\right)F - \frac{(F - 0,1)Z}{0,9 + F} + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y(y, M(t))\frac{\partial F}{\partial y}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\frac{0,5(F - 0,1)Z}{0,9 + F} - 0,07Z + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y(y, M(t))\frac{\partial Z}{\partial y}\right) \quad (3)$$

dimana  $K_y(y, M(t)) = yM(t)$  dan  $M(t) = 10\sin^2 \pi t$ . Dalam model ini jumlah nutrisi ( $N$ ), jumlah phytoplankton ( $F$ ), dan jumlah herbivora zooplankton ( $Z$ ) pada arah horisontal (pada kedalaman laut tertentu) dianggap sama. Variabel bebas yang dipandang dalam model ini selain waktu ( $t$ ) adalah kedalaman laut ( $y$ ). Diharapkan dari tulisan ini akan didapatkan gambaran tentang kehandalan metode EnKF dalam mengestimasi jumlah populasi plankton di laut. Kehandalan metode EnKF akan diukur dari nilai kovariansi error yang secara teori menunjukkan rentang kedekatan hasil estimasi dengan nilai realnya. Semakin kecil kovariansi

error dari variabel estimasi, hasil estimasinya semakin mendekati nilai realnya.

Metode EnKF dijalankan dengan membangkitkan sejumlah ensemble yang merupakan representasi dari variabel state. Ensemble tersebut mempunyai mean sesuai dengan tebakan awal, misalkan. Evensen (Evensen 2003) menyebutkan bahwa berdasarkan eksperimen, pada umumnya jumlah ensemble yang mencukupi adalah 100 – 500. Algoritma EnKF selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 1.

Dalam hal ini,  $x_k$ ,  $\hat{x}_k$ , dan  $P_k$  masing-masing adalah variabel real, variabel estimasi, dan kovariansi error pada saat iterasi ke- $k$ . Variabel  $u_k$  adalah variabel input dalam model yang biasanya merupakan nilai batas dalam model. Data pengukuran dinyatakan dengan  $z_k$ . Sedangkan  $w_k$  dan  $v_k$  adalah variabel random yang ditambahkan pada model deterministik untuk mendapatkan model stokastik. Variabel random  $w_k$  dan  $v_k$  diasumsikan berdistribusi normal dan *white* (meannya nol). Variansi dari  $w_k$  dan  $v_k$  dinyatakan dengan  $Q_r$  dan  $R_k$ , yaitu dalam hal ini diambil  $Q_r = 10,5$  dan  $R_k = 6,25 \times 10^{-4}$ . Matriks  $H$  menunjukkan dimana data pengukuran diambil. Variabel estimasi dan kovariansi error sebelum ditambahkan data pengukuran  $Z_k$  dinyatakan dengan  $\hat{x}_k$  dan  $P_k$ . Sedangkan  $K_k$  adalah Kalman gain yang merupakan bobot dari *residual* data pengukuran.

## METODE

### Tahap 1: Menelaah model populasi plankton

Model populasi plankton yang dipandang dalam masalah ini masih berbentuk kontinu. Oleh karena itu, harus dilakukan pendiskritan terhadap model tersebut. Untuk mendapatkan sistem dinamik diskrit akan digunakan metode beda hingga (*finite difference method*) dengan skema pendiskritan berupa beda maju untuk bentuk turunan pertama dan beda pusat untuk turunan kedua. Sistem diskrit nonlinier yang telah didapat juga masih berbentuk deterministik, sehingga harus diubah menjadi sistem stokastik dengan menambahkan noise pada sistem diskrit tersebut. Dalam hal ini noise akan ditambahkan dengan cara membangkitkan sejumlah bilangan random dari komputer melalui program Matlab.

Tabel 1 Algoritma Ensemble Kalman Filter (EnKF)

Model sistem dan model pengukuran:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k \\ z_k &= Hx_k + v_k \\ w_k &\sim N(0, Q_k), \quad v_k \sim N(0, R_k)\end{aligned}$$

Inisialisasi:

- Bangkitkan  $N_e$  ensemble sesuai dengan tebakan awal  $\bar{x}_0$

$$[x_{0,1} \ x_{0,2} \ x_{0,3} \ \dots \ x_{0,N_e}]$$

- Tentukan nilai awal:

$$\hat{x}_0 = \hat{x}_0^* = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} x_{0,i}$$

Tahap time update:

$$\hat{x}_{k,j}^- = f(\hat{x}_{k-1,j}, u_{k-1}) + w_{k,j} \quad \text{dengan } w_{k,j} \sim N(0, Q_k)$$

Estimasi: 
$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \hat{x}_{k,i}^-$$

Kovariansi error: 
$$P_k^- = \frac{1}{N_e - 1} \sum_{i=1}^{N_e} (\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_{k,i}^- - \hat{x}_k^-)^T$$

Tahap measurement update:

$$z_{k,j} = z_k + v_{k,j} \quad \text{dengan } v_{k,j} \sim N(0, R_k)$$

Kalman gain: 
$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R_k)^{-1}$$

Estimasi: 
$$\begin{aligned}\hat{x}_{k,j} &= \hat{x}_{k,j}^- + K_k (z_{k,j} - H \hat{x}_{k,j}^-) \\ \hat{x}_k &= \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \hat{x}_{k,i}\end{aligned}$$

Kovariansi error: 
$$P_k = [I - K_k H] P_k^-$$

## Tahap 2: Mengimplementasikan metode EnKF

Sistem diskrit stokastik yang didapat pada Tahap 1 akan diselesaikan dengan menggunakan algoritma EnKF. Dalam hal ini variabel state yang dipandang adalah jumlah nutrisi yang tersedia ( $N$ ), jumlah phytoplankton ( $F$ ), dan jumlah zooplankton ( $Z$ ) di laut. Sedangkan variabel bebasnya adalah waktu estimasi dan kedalaman lokasi  $N$ - $F$ - $Z$  di laut. Hasil yang didapat dari metode EnKF akan disimulasikan dengan menggunakan Matlab 6.5.

## Tahap 3: Menganalisis hasil simulasi

Analisis yang dilakukan pada tahap ini dilakukan dengan membandingkan hasil simulasi pada ukuran ensemble yang berbeda, yaitu 2, 10, 100, dan 1000. Hasil simulasi yang dibandingkan adalah norm kovariansi error pada metode EnKF dengan ukuran ensemble berbeda. Efektivitas metode EnKF untuk mengestimasi  $N$ - $F$ - $Z$  dalam model populasi plankton akan disimpulkan per komponen  $N$ ,  $F$ , dan  $Z$  secara terpisah.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Algoritma EnKF hanya dapat diimplementasikan untuk sistem diskrit. Oleh karena itu, harus dilakukan diskritisasi pada model kontinu (1) – (3). Proses diskritisasi dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga. Dalam hal ini variabel kedalaman laut yang total kedalamannya 200 meter didiskritisasi menjadi 20 buah grid yang homogen. Dengan demikian, panjang setiap gridnya (yaitu  $\Delta y$ ) adalah 10 meter. Sedangkan panjang dari grid variabel waktu (yaitu  $\Delta t$ ) adalah 1 hari. Misalkan  $N_{i,k}$  menyatakan jumlah nutrisi di kedalaman  $i\Delta y$  pada saat  $k\Delta t$ . Misalkan pula  $\frac{\partial N}{\partial y}$  dan  $\frac{\partial N}{\partial t}$  keduanya diaproksimasi dengan formula beda maju, sedangkan  $\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}$  diaproksimasi dengan

formula beda pusat. Jika secara identik pengertian ini digunakan pula pada variabel jumlah phytoplankton ( $F$ ) dan zooplankton ( $Z$ ), maka dari persamaan (1) – (3) didapatkan model diskrit

$$N_{i,k+1} = -\Delta t \left( \frac{\alpha N_{i,k}}{0,5 + N_{i,k}} - 0,07 \right) F_{i,k} + \left( K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) N_{i-1,k} + \left( 1 - \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} - 2K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) N_{i,k} + \left( \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} + K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) N_{i+1,k} \quad (4)$$

$$F_{i,k+1} = \Delta t \left( \frac{\alpha N_{i,k}}{0,5 + N_{i,k}} - 0,07 \right) F_{i,k} - \frac{\Delta t (F_{i,k} - 0,1) Z_{i,k}}{0,9 + F_{i,k}} + \left( K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) F_{i-1,k} + \left( 1 - \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} - 2K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) F_{i,k} + \left( \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} + K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) F_{i+1,k} \quad (5)$$

$$Z_{i,k+1} = \frac{0,5\Delta t (F_{i,k} - 0,1) Z_{i,k}}{0,9 + F_{i,k}} + \left( K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) Z_{i-1,k} + \left( 1 - 0,07\Delta t - \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} - 2K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) Z_{i,k} + \left( \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} + K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) Z_{i+1,k} \quad (6)$$

dengan

$$\alpha = 0,7555 \quad (7)$$

$$M = 10(\sin \pi k \Delta t)^2 \quad (8)$$

$$K_y = i \Delta y M \quad (9)$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial y} = M \quad (10)$$

Untuk lebih menyederhanakan persamaan (4) – (6), misalkan

$$a_1 = -\Delta t \alpha, \quad a_2 = 0,07\Delta t, \quad a_3 = K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

$$a_4 = 1 - \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} - 2K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

$$a_5 = \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} + K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

$$b_1 = \Delta t \alpha, \quad b_2 = -0,07\Delta t, \quad b_3 = -\Delta t,$$

$$b_4 = 0,1\Delta t, \quad b_5 = K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

$$b_6 = 1 - \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} - 2K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

$$b_7 = \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} + K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

$$c_1 = 0,5\Delta t, \quad c_2 = -0,05\Delta t, \quad c_3 = K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

$$c_4 = 1 - 0,07\Delta t - \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} - 2K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

$$c_5 = \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\Delta t}{\Delta y} + K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2},$$

dengan nilai-nilai  $\alpha$ ,  $M$ ,  $K_y$ , dan  $\frac{\partial K_y}{\partial y}$

diberikan pada persamaan (7) – (10). Kemudian dengan mengumpulkan indeks  $k$  di ruas kanan dan indeks  $(k+1)$  di ruas kiri, maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ F_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \left( \frac{a_1 N_1}{0,5 + N_1} + a_2 \right) F_1 + a_4 N_1 + a_5 N_2 \\ \left( \frac{b_1 N_1}{0,5 + N_1} + b_2 \right) F_1 + \frac{(b_3 F_1 + b_4) Z_1}{0,9 + F_1} + b_6 F_1 + b_7 F_2 \\ \frac{(c_1 F_1 + c_2) Z_1}{0,9 + F_1} + c_4 Z_1 + c_5 Z_2 \end{bmatrix}_k + a_3 \begin{bmatrix} N_0 \\ F_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}_k \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} N_{19} \\ F_{19} \\ Z_{19} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \left( \frac{a_1 N_{19}}{0,5 + N_{19}} + a_2 \right) F_{19} + a_3 N_{18} + a_4 N_{19} \\ \left( \frac{b_1 N_{19}}{0,5 + N_{19}} + b_2 \right) F_{19} + \frac{(b_3 F_{19} + b_4) Z_{19}}{0,9 + F_{19}} + b_5 F_{18} + b_6 F_{19} \\ \frac{(c_1 F_{19} + c_2) Z_{19}}{0,9 + F_{19}} + c_3 Z_{18} + c_4 Z_{19} \end{bmatrix}_k + a_5 \begin{bmatrix} N_{20} \\ F_{20} \\ Z_{20} \end{bmatrix}_k \quad (12)$$

Sedangkan, untuk didapatkan  $i = 1, 2, 3, \dots, 18$  didapatkan

$$\begin{bmatrix} N_i \\ F_i \\ Z_i \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \left( \frac{a_1 N_i}{0,5 + N_i} + a_2 \right) F_i + a_3 N_{i-1} + a_4 N_i + a_5 N_{i+1} \\ \left( \frac{b_1 N_i}{0,5 + N_i} + b_2 \right) F_i + \frac{(b_3 F_i + b_4) Z_i}{0,9 + F_i} + b_5 F_{i-1} + b_6 F_i + b_7 F_{i+1} \\ \frac{(c_1 F_i + c_2) Z_i}{0,9 + F_i} + c_3 Z_{i-1} + c_4 Z_i + c_5 Z_{i+1} \end{bmatrix}_k \quad (13)$$

Dalam hal ini  $N_0, F_0, Z_0$  adalah input untuk nilai awal variabel state di permukaan laut. Sedangkan, adalah input untuk nilai awal variabel state di kedalaman laut 200 meter. Dalam hal ini juga berlaku  $a_3 = b_5 = c_3$  dan  $a_5 = b_7 = c_5$ .

Jika dituliskan secara lengkap untuk  $i = 1, 2, \dots, 19$ , maka model diskrit pada (11) – (13) secara umum dapat dituliskan ke dalam bentuk fungsi nonlinier

$$x_{i+1} = f(x_k, u_k) \quad (14)$$

dengan

$$x_k = (N_1, \dots, N_{19}, F_1, \dots, F_{19}, Z_1, \dots, Z_{19})^T_k$$

adalah variabel state pada time step ke- $k$  yang berisikan 57 variabel. Dalam hal ini variabel

$u_k = (N_0, F_0, Z_0, N_{20}, F_{20}, Z_{20})^T_k$  pada persamaan (14) adalah variabel input yang merupakan syarat batas di permukaan laut dan di kedalaman laut 200 meter. Model pengukuran yang digunakan dalam hal ini diasumsikan berbentuk linier, yaitu

$$Z_k = Hx_k \quad (15)$$

dengan  $H$  adalah matriks identitas berukuran.

Model populasi plankton pada (14) dan model pengukuran pada (15) masih berbentuk deterministik. Oleh karena itu, harus ditambahkan faktor stokastik dengan menambahkan noise pada masing-masing

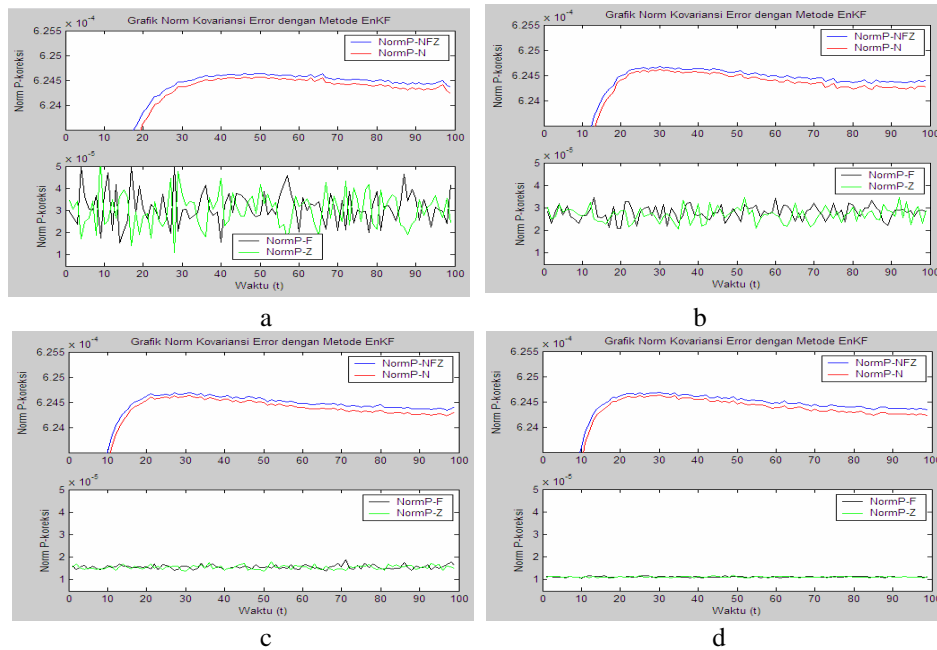
persamaan. Dengan demikian didapatkan model stokastik

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k \quad (16)$$

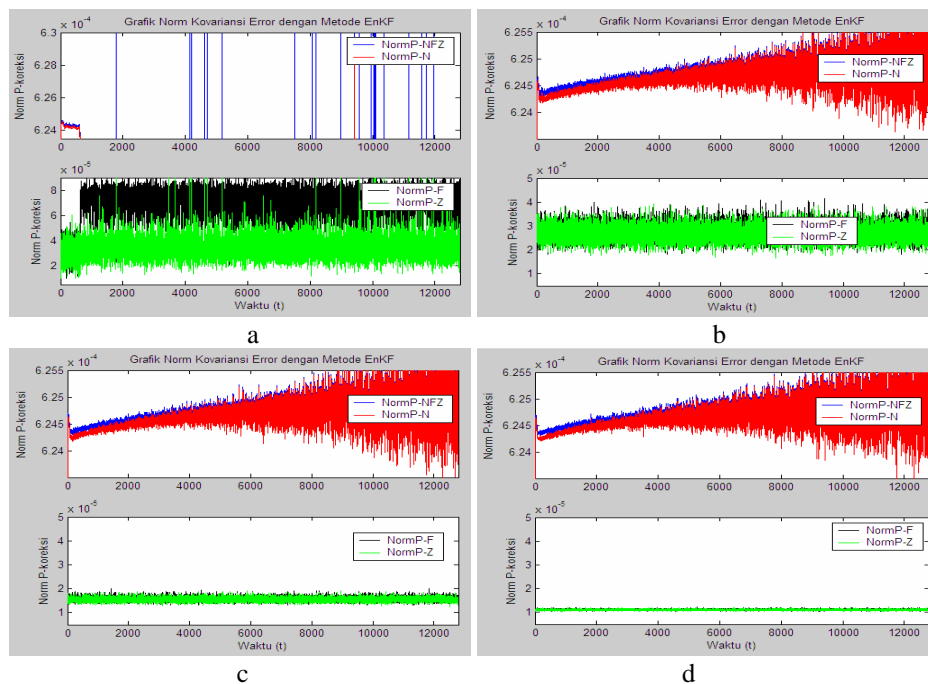
$$z_k = Hx_k + v_k \quad (17)$$

dengan  $f(x_k, u_k)$  adalah fungsi nonlinier sebagaimana didefinisikan pada persamaan (11) – (13). Noise sistem  $w_k$  dan noise pengukuran  $v_k$  dalam hal ini adalah variabel random yang dibangkitkan melalui fasilitas dalam program Matlab. Keduanya berdistribusi normal dengan mean nol dan variansi bernilai konstan, yaitu masing-masing  $10^{-5}$  dan  $6,25 \times 10^{-4}$ .

Persamaan (16) dan (17) selanjutnya disimulasikan dengan program Matlab untuk mendapatkan hasil estimasi dengan metode EnKF. Keandalan hasil estimasi akan diukur dari kovariansi error yang dihasilkan. Oleh karena kovariansi errornya berbentuk matriks bujursangkar, maka ukuran kovariansi error dinyatakan dengan normnya. Keseluruhan pengertian kovariansi error (atau lebih lengkapnya norm kovariansi error) dalam tulisan ini mengacu pada pendefinisian dalam software Matlab yang menggunakan konsep *singular value decomposition* (svd). Jumlah ensemble yang dibangkitkan berjumlah 2, 10, 100, dan 1.000.



Gambar 1. Norm Kovariansi Error dengan EnKF: a) ( $ne = 2$ ) untuk  $nt = 100$ , b) ( $ne = 10$ ) untuk  $nt = 100$  c) ( $ne = 100$ ) untuk  $nt = 100$ , d) ( $ne = 1000$ ) untuk  $nt = 100$ .



Gambar 2. Norm Kovariansi Error dengan EnKF: a) ( $n_e = 2$ ) untuk  $nt = 12.800$ , b) ( $n_e = 10$ ) untuk  $nt = 12.800$  c) ( $n_e = 100$ ) untuk  $nt = 12.800$ , d) ( $n_e = 1000$ ) untuk  $nt = 12.800$ .

Hasil simulasi secara umum ditampilkan dalam Gambar 1 hingga Gambar 3. Grafik "NormP-NFZ" dalam gambar menunjukkan nilai kovariansi error estimasi total dari ketiga variabel  $N$ ,  $F$ , dan  $Z$ . Sedangkan kovariansi error estimasi dari variabel  $N$ ,  $F$ , dan  $Z$ , masing-masing dalam gambar ditunjukkan dengan "NormP-N", "NormP-F", dan "NormP-Z". Nilai  $n_e$  menunjukkan jumlah ensemble yang dibangkitkan pada metode EnKF. Sedangkan nilai  $nt$  menunjukkan banyaknya iterasi program simulasi (dalam hari).

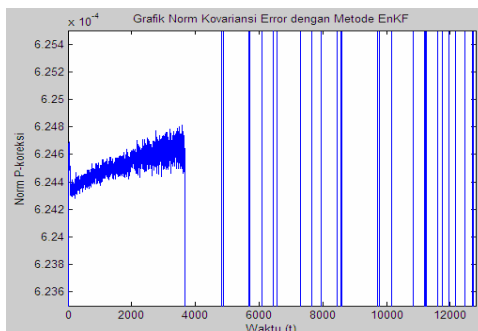
Dari hasil simulasi untuk  $nt=100$  sebagaimana ditampilkan pada Gambar 1 terlihat bahwa, **pertama**, grafik norm kovariansi error total mendekati bentuk grafik kovariansi error dari  $N$ . Oleh karena itu, dapat dikatakan bahwa nilai kovariansi error dari  $N$  dalam kasus ini sangat mempengaruhi nilai kovariansi error totalnya.

**Kedua**, norm kovariansi error dari  $F$  dan  $Z$  lebih kecil daripada norm kovariansi error dari  $N$ . Hal ini menunjukkan bahwa hasil estimasi variabel  $F$  dan  $Z$  dalam simulasi ini lebih dipercaya dibandingkan hasil estimasi variabel  $N$ .

**Ketiga**, penambahan jumlah ensemble pada metode EnKF ternyata memberikan pengaruh pada kelicinan (*smoothness*) grafik norm kovariansi error semua variabel. Dengan

bertambahnya jumlah ensemble yang dibangkitkan, grafik norm kovariansi errornya lebih licin atau lebih kecil amplitudo osilasinya. Pengaruh ini terlihat lebih signifikan pada grafik norm kovariansi error dari  $F$  dan  $Z$ . Penambahan jumlah ensemble juga dapat memperkecil nilai norm kovariansi error.

Hasil yang didapat dari simulasi untuk  $nt=100$  juga berlaku untuk  $nt$  yang besar, yaitu 12.800, sebagaimana ditampilkan pada Gambar 2 hingga Gambar 3. Namun demikian, dalam hal ini ada beberapa catatan tambahan. **Pertama**, estimasi menggunakan EnKF dengan jumlah ensemble 2 atau 10 gagal dilakukan. Metode EnKF dengan jumlah ensemble 2 mengalami kegagalan lebih awal dibandingkan EnKF dengan jumlah ensemble 10. Dari Gambar 2a terlihat bahwa sebelum mencapai  $nt=1.000$ , norm kovariansi error dari  $N$  bersilasi secara tidak beraturan yang mana ini menyebabkan norm kovariansi error totalnya juga bersilasi tak beraturan. Norm kovariansi error total pada EnKF dengan jumlah ensemble 10 berhasil didapatkan pada suatu simulasi (Gambar 2b). Akan tetapi, norm kovariansi error totalnya gagal didapatkan pada simulasi yang lain (Gambar 3) dimana grafiknya bersilasi tak beraturan sebelum  $nt = 4.000$ .



Gambar 3. Norm Kovariansi Error Total dengan EnKF ( $ne=10$ ) untuk  $nt = 12.800$ .

**Kedua**, dari Gambar 2b, Gambar 2c, dan Gambar 2d juga terlihat bahwa norm kovariansi error dari  $F$  dan  $Z$  pada EnKF dengan jumlah ensemble 1.000 lebih kecil dibandingkan dengan pada jumlah ensemble 100. Demikian juga, norm kovariansi error dari  $F$  dan  $Z$  pada jumlah ensemble 100 lebih kecil dibandingkan dengan pada jumlah ensemble 2. Ini menunjukkan bahwa penambahan jumlah ensemble dalam metode EnKF dapat memperkecil norm kovariansi errornya, yaitu sekaligus meningkatkan kepercayaan terhadap hasil estimasi.

### KESIMPULAN

Dengan memperhatikan hasil simulasi dan pembahasan yang sudah diuraikan terdahulu dapat disimpulkan beberapa hal:

1. Dalam model populasi yang dikaji ini norm kovariansi error dari variabel  $N$  pada metode EnKF mendominasi norm kovariansi error totalnya dibandingkan dengan variabel  $F$  dan  $Z$ . Kecenderungan norm kovariansi error  $N$  adalah berosilasi (naik-turun) dengan amplitudo membesar sedangkan norm kovariansi error  $F$  dan  $Z$  berosilasi dengan amplitudo relatif konstan. Norm kovariansi error  $F$  dan  $Z$  lebih kecil daripada norm kovariansi error  $N$ .
2. Penambahan jumlah ensemble pada metode EnKF dapat memperkecil norm kovariansi error, sehingga dengan demikian akan dapat memperbaiki hasil estimasi. Semakin banyak jumlah ensemble yang dibangkitkan pada metode EnKF, hasil estimasinya juga semakin

baik. Namun demikian, patut diperhatikan bahwa jumlah ensemble yang semakin besar akan menambah waktu komputasinya.

3. Pengambilan jumlah ensemble 100 pada metode EnKF memberikan hasil estimasi yang hampir sama baiknya dengan jumlah ensemble 1.000. Sedangkan, pengambilan jumlah ensemble 10 atau kurang akan menyebabkan estimasinya gagal.

### DAFTAR PUSTAKA

- Apriliani E. 2003. The application of implicit Kalman filtering on a one dimensional shallow water, *Proceedings of the SEAMS-GMU Conference*. pp. 234-240.
- Burgers G, Van Leeuwen PJ, Evensen G, 1998. Analysis scheme in the ensemble Kalman filter, *Monthly Weather Review*. **126**:1719-1724.
- Eknes M & Evensen G. 2002. An ensemble Kalman filter with a 1-D marine ecosystem model. *Journal of Marine System*. **36**:75-100.
- Evensen G. 1994. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics, *J. Geophys. Res.* **99**(C5):10,143-10,162.
- Evensen G. 2003. The ensemble Kalman filter: theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*. **53**:343-367.
- Verlaan M. 1998. *Efficient Kalman Filtering Algorithms for Hydrodynamic Models*. Technische Universiteit Delft.
- Welch G & Bishop G. 2004. *An Introduction to the Kalman Filter*. Department of Computer Science. University of North Carolina at Chapel Hill.